2種類のランダムネスを持つランダムウォークの理論(非線型・非平衡状態の統計力学,研究会報告)

原, 啓明

f, g, h, r はL上，有界かつなめらか

$g/f, h/f, r/f$ がLにて有界(突然変異の効果を含まない事に対応)

$\varepsilon\to 0$のとき，$x^{(\varepsilon)}(t)$は[命題 1]の拡散係数とドリフト係数をもつ拡散過程$x(t)$に関数空間D[0, 1]で弱収束する。

但し，D[0, 1]は[0, 1]上の右連続，左極限の存在する関数全体にSkorohod topologyを入れた距離空間であり，詳しくは前掲，Billingsleyを参照の事。また[命題2]により，任意の有限次元分布の弱収束が分る。なお，[命題2]の証明にはGikhman, I. I.: Convergence to Markov Processes, Ukrainian Math. Jour. **21** (1969) p. 263 の定理を用いた。

2種類のランダムネスを持つランダムウォークの理論

東北大・工　原　啓明

濃厚高分子溶液[1)-2)]，原子炉雑音[3)]等では，考える系にいくつかの異なるランダムネスを与える“雑音源”が含まれている。

前回の研究会[4)]につづいて，ここでは区別出来る2種類のランダムネスを持つ系を，

(I) 2つの内部ランダムネスを含む(例，濃厚高分子溶液)

(II) 1つの内部ランダムネスと外部からのランダムネスを含む

場合に分け，これ等の系のランダムウォーク(RW)の漸化式に対して，“粗視化”を行い，一方のランダムネスを消去して得られるRWの漸化式について論ずる。

RWの漸化式は

$$W(m, N)=\sum_{\alpha=\pm,0}P_{N-1}^{\alpha}(m|m-\alpha\cdot 1)W(m-\alpha\cdot 1,\ N-1) \tag{1}$$

$$\sum_{\alpha}P_{N-1}^{\alpha}(m+\alpha\cdot 1|m)=1$$

である。[4)] $W(m, N)$はウォーカーがN回のステップ後，場所mに到達する確率，又$P_{N-1}^{\alpha}(m|m-\alpha\cdot 1)$は$m-\alpha\cdot 1$から$m$にとび移る確率を表わす。更に，詳細な記述では，$P_N^{\alpha}$ 自身もWと複雑に関係し，[5)] (1)は

$$W(m, N)=\sum_{\alpha}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=-L}^{L}P_{N-k}^{\alpha}(m|m-\alpha\cdot l\,;W)\,W(m-\alpha\cdot l,\ N-k) \tag{2}$$

（ $\pm L$ ：ウォーカーが到達可能な上(下)限）

と書ける。

(2)の粗視化を$\langle\ \rangle$で表わし，次の要請を行う：

Nとmに関する適当な粗視化を行えば(2)は再び(1)と類似な式

$$\langle W(m', N')\rangle = \sum_{\alpha} \widetilde{P}^{\alpha}_{N'-1}(m'|m'-\alpha\cdot 1\,;W)\langle W(m'-\alpha\cdot 1, N'-1)\rangle \tag{3}$$

となる。ここでm'とN'は初めのmとNの単位が粗視化によって新しい単位に変ったことを示す。以下では"$'$"を省く。P^{α}_{N-1}は$\langle\!\langle P^{\alpha}_{N-1}\rangle\!\rangle$で定義されたもので，更に$\langle\!\langle P^{\alpha}_{N-1}\rangle\!\rangle$は$\langle\!\langle P^{\alpha}_{N-k}(m|m-\alpha\cdot l\,;W)\rangle\!\rangle = \delta_{k,1}\delta_{l,1}\langle\!\langle P^{\alpha}_{N-1}(m|m-\alpha\cdot 1\,;W)\rangle\!\rangle$によって定義された量である。ただし$\langle\!\langle P\rangle\!\rangle \equiv \langle PW\rangle/\langle W\rangle$である。同様な要請を$\langle[W(m', N')]^2\rangle$に対しても行う。以下では，$\langle W\rangle$，或いは$\langle[W]^2\rangle$に関する漸化式は，再び(1)，或いは(3)に類似な関係式で表わされると云う要請を使って(I)(II)における2つのランダムネス間の関係をしらべる。

(I)の濃厚高分子溶液では，1本の鎖状高分子の要素であるモノマーの自由な運動(特性時間T_1)は他の高分子の運動(特性時間；T_2)によって制限される。

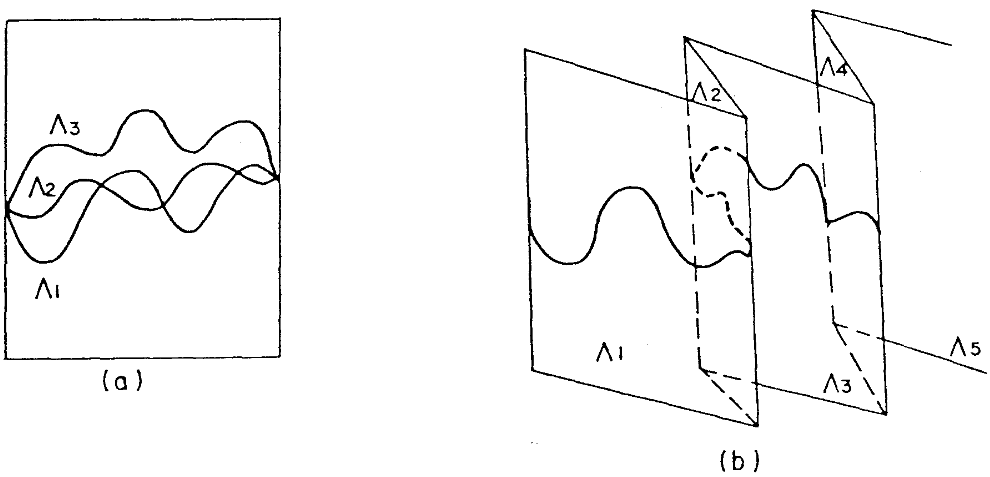

図1.　(a)"ミミズのトンネル"の標本経路。(b)Λ_{2n}上では，漸化式の$\widetilde{P}^{\alpha}_{t}$の変換($\widetilde{P}^{\pm}_{t} \to \widetilde{P}^{\mp}_{t}$)を行うと(a)の標本経路は1本の長いトンネルになる。

ここでは一本の高分子を"ミミズ"とみなし，その運動経路を図1で示す標本経路で考える。高分子は，M_0個の単位長さa_0の要素から出来ているものとする。時刻tにおけるm番目の要素の位置をトンネルに沿った座標$X_m(t)$で表わし，$t+\Delta t_0$の位置$X_m(t+\Delta t_0)$は，(1)と同様な漸化式で決まるものとする。更に$\widetilde{P}^{\alpha}_{t}$（$\equiv \widetilde{P}^{\alpha}_{t}(m|m-\alpha\cdot 1)$）の$t$依存性は，ゆっくり変化する部分，$P^{\alpha}_{t} = P^{\alpha}_{0} + A^{\alpha}\cos\Omega t$，($\Omega \sim \dfrac{2\pi}{T_2}$)と速く変化する部分，$\eta^{\alpha}_{t} = B^{\alpha}\cos\omega t$ ($\omega \sim \dfrac{2\pi}{T_1}$)によって表わされるものとする。($A^{\alpha}$, B^{α}は$\sum_{\alpha} A^{\alpha} = \sum_{\alpha} B^{\alpha} = 0$を満す定数)。基本単位$a_0$，$\Delta t_0$，

M_0で記述された$X_m(t+\Delta t_0)$の漸化式から新しい基本単位a（$\gg a_0$），Δt（$\gg \Delta t_0$），M（$\ll M_0$）の漸化式を得る際に，粗視化を$\ll \widetilde{P}_t^\alpha \gg = P_t^\alpha$，$\ll \eta_t^\alpha \gg = 0$となる$\Delta t\,(T_1 \ll \Delta t \ll T_2)$で特徴づければ，この粗視化により，$< X >_{m,\,t+\Delta t}$（$= < X_m(t+\Delta t_0) >$）の漸化式は$\eta_t^\alpha$が消去された(3)式と類似な関係式となる。もし$\Delta t$を$\Delta t \sim T_1$にとれば，$\eta_t^\alpha$は完全に消去出来ず，たとえば$\ll \eta_t^\alpha \gg = \alpha\delta_t$，$(\delta_t > 0)$，$\ll P_t^\alpha \gg = P_t'^\alpha$とすれば，$< X >_{m,t+\Delta t}$の漸化式は

$$< X >_{m,\,t+\Delta t} = \sum_\alpha P_t'^\alpha(m\,|\,m-\alpha\cdot 1) < X >_{m-\alpha\cdot 1,\,t} + \sum_\alpha \alpha\delta_t < X >_{m-\alpha\cdot 1,\,t} \tag{4}$$

となる。

次に，$\widetilde{P}_t^\alpha(m\,|\,m-\alpha\cdot 1)$を$\widetilde{P}_t^\alpha(m)$で近似し，ある点$X_n(0)$から測った変位，$X'_{m,n}(t+\Delta t_0)$（$= X_m(t+\Delta t_0) - X_n(0)$）の２乗した量，$[X'_{mn}(t+\Delta t_0)]^2$を考える。この場合$X'_{mn}(t+\Delta t_0)$の漸化式は(1)と同様な式となり，$[X'_{m,n}]^2$の右辺は$\widetilde{P}_t^\alpha$と$\widetilde{P}_t^\alpha \widetilde{P}_t^\beta$とを含んだ式となる。この式は，粗視化した新しい基本単位a，Δt，Mでは再び(3)と類似な表式となることを要請すれば，そのための条件として$\ll \widetilde{P}_t^\alpha \widetilde{P}_t^\beta \gg = 0$が得られる。$\widetilde{P}_t^\alpha$が２つの部分，$P_t^\alpha$と$\eta_t^\alpha$で表わされると，この条件は更に

$$\ll P_t^\alpha(\delta_{\alpha\beta} - P_t^\beta) \gg = \ll \eta_t^\alpha \eta_t^\beta \gg \tag{5}$$

となり，$T_1 \ll \Delta t < T_2$とすれば$< [X'_{m,n}]^2 >$の漸化式はゆるやかに変化するP_t^αだけで記述される[6]。

外部から雑音を考える(Ⅱ)では，(Ⅰ)のP_t^αが$P_t^\alpha + \delta\eta_t^\alpha$（或いは$\delta'\eta_t^\alpha$）$\equiv \widetilde{P}_t^\alpha(m\,|\,m-\alpha\cdot 1)$（或いは$\widetilde{P}_t^\alpha(m+\alpha\cdot 1\,|\,m)$）となり，この外部雑音$\delta\eta_t^\alpha$（$\delta'\eta_t^\alpha$）によって，$W$も$W + \delta W \equiv \widetilde{W}$と変化する。

今，$P_t^\alpha(m\,|\,m-\alpha\cdot 1)(P_t^\alpha(m+\alpha\cdot 1\,|\,m))$を$P_t^\alpha(m)$と$\Delta(\Delta')P_t^\alpha(m)$で表わし，以下簡単のため，$P_t^\alpha$，$\Delta(\Delta')P_t^\alpha$，$\widetilde{W}$における$m$依存性を無視すると，$\widetilde{W}$の漸化式は

$$\begin{aligned} &\widetilde{W}(t+\Delta t_0) = [1 - \alpha_0(t) - \alpha_1(t)]\,\widetilde{W}(t), \\ &\alpha_0(t) = (\Delta + \Delta')(P_t^+ + P_t^-), \quad \alpha_1(t) = (\delta' - \delta)(\eta_t^+ + \eta_t^-) \end{aligned} \tag{6}$$

となる。α_0とα_1は内部と外部のランダムネスに起因する因子である。Δt（$= n\Delta t_0$）きざみの漸化式は(6)から$\widetilde{W}(t+\Delta t) = \exp[-\sum_{i=1}^{n}(\alpha_0(t_i) + \alpha_1(t_i))]\,\widetilde{W}(t)$となり，プロセスに対する粗視化を

$$\begin{aligned} &< \alpha_0(t) > = \alpha_0(t), \quad < \alpha_1(t) > = 0 \\ &< \alpha_i(t_1)\,\alpha_j(t_2) > = \sigma_{ii}\,\delta_{ij}\,(\delta_{t_1,t_2}/\Delta t_0) \end{aligned} \tag{7}$$

で特徴づけると，一般に$< [\widetilde{W}]^k >$に対する漸化式は，再び(3)，即ち(6)と類似な式となる：（$k =$

1, 2, 3,……)

$$<[\widetilde{W}]^k>_{t+\Delta t}=[1-k\alpha_0(t)+\frac{k(k-1)}{2}(\sigma_{00}+\sigma_{11})]<[\widetilde{W}]^k>_t \quad (8)$$

即ち(8)は$<[\widetilde{W}]^k>$の漸化式が再び(3)と類似な式となる要請を満す十分条件である。逆に，$\widetilde{W}$に対する“モーメント”$<[\widetilde{W}]^k>$が与えられている時は粗視化を特徴づける特性関数を導入することで，粗視化の“重み”を形式的に与えることが出来る[5]。

参考文献

1) P. G. de Gennes: J. Chem. Phys. **55**, 572 (1971).

2) M. Doi and S. F. Edward: J. Chem. Soc. Faraday Trans. II **74**, 1789 (1978).

3) M. M. R. Williams: “*Random Processes in Nuclear Reactors*” Pergamon, (1974), ch. 5.

4) H. Hara. 物性研究 **33**, No. 5, E28 (1980).

5) H. Hara.「確率過程論と開放系の統計力学」(研究会　1981, 2月)

6) H. Hara (To be submited to Z. Physik).

微視的レーザー理論

筑波大・物理　有光敏彦
お茶大・理　柴田文明
橋爪夏樹

最近自己組織化ということが，種々の系で議論されている。条件が整うと，ゆらぎが成長して巨視的なパターンなどが形成されるわけである。Haken は，これらの現象を平衡系の相転移と関連させて統一的に解釈しようとしている。つまり，はじめゼロであったオーダーパラメータが，ある条件下で自己組織化 (協力現象) によりゆらぎを種にして成長し，有限の値をもつと考えるのである。対称性の低い「相」，つまりオーダーパラメータが有限の値をもつ「相」で巨視的なパターンなどが観測されると考えるのである。

レーザーの発振現象も，オーダーパラメータがゼロである「相」がポンピングのため不安定